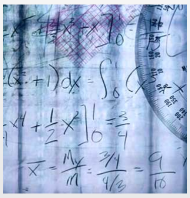
Estatística Aplicada

Noções Introdutórias e utilização do computador



Quinta aula - Probabilidade

Probabilidade

A teoria das probabilidades nada mais é do que o bom senso transformado em cálculo.

Ela é um dos mais valiosos suplementos à ignorância e a falibilidade da mente humana.

Pierre S. Laplace (1749-1827)

Probabilidade

A probabilidade é uma medida da incerteza dos fenômenos biológicos. Traduz-se por um número real compreendido entre

0 (zero) e **1** (um).

Exercícios:

a) Qual a probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino?

b) Um pesquisador verifica que, dentre 1000 recém-nascidos, 40 possuem perda auditiva. Com base nessa experiência, qual a probabilidade de um criança nascer com perda auditiva?

Probabilidade

Definição de Probabilidade

Se um evento ocorre de **n** maneiras igualmente possíveis e se, destas, exatamente **m** maneiras correspondem ao evento A, então a probabilidade do evento A é dada pela razão:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Pedro Menezes - 2008 4

Probabilidade

Em outras palavras:

$$P(\text{resultado favorável}) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados igualmente possíveis}}$$

Pedro Menezes - 2008 5

Probabilidade

Observações:

- A probabilidade de um evento qualquer é um número real não negativo

- A probabilidade de um evento ocorrer com toda certeza é igual a 1

Pedro Menezes - 2008 6

Probabilidade

Existem 2 tipos de probabilidades:

- *a priori* ou matemática, calculada a partir de hipóteses segundo um modelo matemático e sem experimentação, determinando as probabilidades de acontecimentos futuros;

Pedro Menezes - 2008 7

Probabilidade

Existem 2 tipos de probabilidades:

- *a posteriori*, que é a estimativa por meio de dados experimentais, da verdadeira probabilidade ou valor mais provável.

Pedro Menezes - 2008 8

Probabilidade

Espaço Amostral e Evento

Considere o experimento: Proporção de sexos em famílias com 2 descendentes.

Espaço amostral (S): conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento. No exemplo, distribuição de sexos em famílias com 2 descendentes,

S={MM,MF,FM,FF}

Pedro Menezes - 2008 9

Probabilidade

Evento: qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exemplos:
A = {MM , FF}, evento que denota 2 filhos do mesmo sexo;
B = {MF , FM}, evento que denota 2 filhos de sexos diferentes.

Probabilidade

Exemplo 1:

No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de sair cara?

O espaço amostral desse experimento é S = {cara, coroa}, sendo m = 1 (um resultado favorável ao evento cara em S) e n = 2 (dois resultados possíveis em S)

Portanto,

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0{,}5(50\%)$$

Probabilidade

Exemplo 2

Qual a probabilidade de um dado ser lançado e cair o número seis?

Número	**Probabilidade**
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

m = 1
n = 6 **p = m/n = 1/6 = 0,166 = 16,7%**

Probabilidade

Exercício 1:

Dos 50 pacientes de uma clínica, verificou-se que 20 eram do sexo masculino (5 crianças e 15 adultos) e 30 do sexo feminino (10 crianças e 20 adultos). Considerando-se um paciente ao acaso, qual a probabilidade dele ser:

(obs. os pacientes foram catalogados e depois os prontuário foram misturados novamente)

(a) adulto;
(b) do sexo masculino;
(c) criança e do sexo feminino;
(d) adulto e do sexo masculino;

Pedro Menezes - 2008 13

Probabilidade

Solução:

$$(a) = P(\text{adulto}) = \frac{35}{50} = 0{,}7(70\%)$$

$$(b) = P(\text{masculino}) = \frac{20}{50} = 0{,}4(40\%)$$

$$(c) = P(\text{criança/feminino}) = \frac{10}{50} = 0{,}2(20\%)$$

$$(d) = P(\text{adulto/masculino}) = \frac{15}{50} = 0{,}3(30\%)$$

Pedro Menezes - 2008 14

Probabilidade

Exercício 2:

Dos 200 pacientes do HEJC, verificou-se que 125 apresentavam pneumonia (65 homens e 60 mulheres) e 75 eram diabéticos (30 homens e 45 mulheres). Considerando-se um paciente ao acaso, qual a probabilidade dele ser:

(obs. os pacientes foram catalogados e depois os prontuário foram misturados novamente)

(a) homem;
(b) apresentar pneumonia;
(c) ser mulher e diabético;
(d) ser homem e ter pneumonia;

Pedro Menezes - 2008 15

Probabilidade

Solução:

$$(a) = P(\text{homem}) = \frac{95}{200} = 0{,}475(47{,}5\%)$$

$$(b) = P(\text{ter pneumonia}) = \frac{125}{200} = 0{,}625(62{,}5\%)$$

$$(c) = P(\text{mulher / diabética}) = \frac{45}{200} = 0{,}225(22{,}5\%)$$

$$(d) = P(\text{homem / pneumonia}) = \frac{65}{200} = 0{,}325(32{,}5\%)$$

Probabilidade

Probabilidade Condicional

Exemplo: Suponha que um dado seja jogado. A probabilidade de ter ocorrido a face 3 é 1/6 = 16,7%. Agora imagine que o dado foi jogado e já se sabe que ocorreu face com número ímpar. Qual a probabilidade de ter ocorrido a face 3?

Resposta: Note que se saiu uma face com número ímpar, só podem ter ocorrido os números: 1, 3 ou 5. Logo, a probabilidade de ter ocorrido 3 é 1/3 = 33,3%.

Probabilidade

Para Eventos Independentes

Para entender a idéia de eventos independentes, imagine que um dado e uma moeda sejam jogados ao mesmo tempo e se pergunte:

a) qual é a probabilidade de ocorrer cara na moeda?

b) qual é a probabilidade de ocorrer cara na moeda sabendo que ocorreu face 6 no dado?

Probabilidade

Eventos Independentes

Tabela 1: Eventos possíveis.

Dado	Moeda	
	Cara	Coroa
1	Cara	Coroa
2	Cara	Coroa
3	Cara	Coroa
4	Cara	Coroa
5	Cara	Coroa
6	Cara	Coroa

Existem 12 eventos igualmente possíveis

A probabilidade de sair cara é 6/12 = 1/2.
A probabilidade de sair cara, sabendo que ocorreu 6 no dado é 1/2.

Neste exemplo, a probabilidade de ocorrer o evento, sair cara, não foi modificada pela ocorrência do outro evento, sair 6 no dado.

Diz então que esses eventos são independentes.

Probabilidade

Teorema da adição

Se A e B são eventos num espaço amostral finito S, a probabilidade de reunião dos subconjuntos A e B é igual a adição das probabilidades de A e B, menos a probabilidade da intersecção do subconjunto A e B.

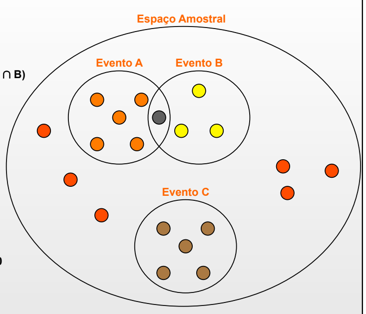
Se os eventos A e B podem ocorrer ao mesmo tempo, a probabilidade de ocorrer A ou B é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade

Teorema da adição

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$P(A \cup B) = 6/20 + 4/20 – 1/20$

$= 0,3 + 0,20 – 0,05$

$P(A \cup B) = 0,45$

45% de chance de ser A ou B

n = 20

Probabilidade

Exercício 3:

No Portugal Ramalho foi realizada uma pesquisa para testar a eficiência de duas drogas diferentes para esquizofrenia (A e B), com os seguintes resultados:

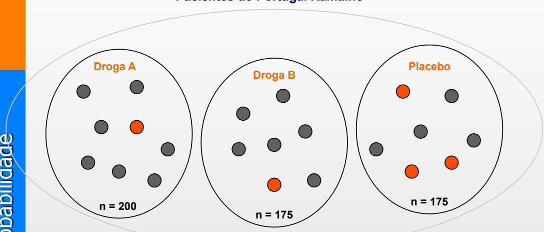
Resultado	Droga A	Droga B	Placebo	Total
Alta	**175**	**150**	**100**	**425**
Esquizofrenia	**25**	**25**	**75**	**125**
TOTAL	200	175	175	550

Qual a probabilidade do paciente ter sido submetido à droga B ou ter esquizofrenia?

Probabilidade

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A e B)

Pacientes do Portugal Ramalho



N = 550

25 pacientes **Esquizofrenia**
Alta

P (Droga B)

175/550
= 0,31

P (Esquizofrenia)

125/550
= 0,22

P(Droga B ∩ Esquizofrenia)

25/550
= 0,04

Probabilidade

Como os eventos Droga B e Esquizofrenia podem ocorrer ao mesmo tempo, pois 25 pacientes que utilizaram a droga B continuaram com esquizofrenia, deve-se observar a interseção entre os dados.

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

$$P(DrogaB \cup Esquizofrenia) = P(DrogaB) + P(Esquizofrenia) - P(DrogaB \cap Esquizofrenia) = \frac{175}{550} + \frac{125}{550} - \frac{25}{550} = 0{,}49(49\%)$$

Probabilidade

Observação

Se A e B forem dois eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade da reunião dos subconjuntos A e B é simplesmente igual a adição de suas probabilidades individuais.

Se os eventos A e B **não podem** ocorrer ao mesmo tempo, a probabilidade de ocorrer A ou B é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Probabilidade

Teorema da adição

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \cancel{- P(A \cap B)}$

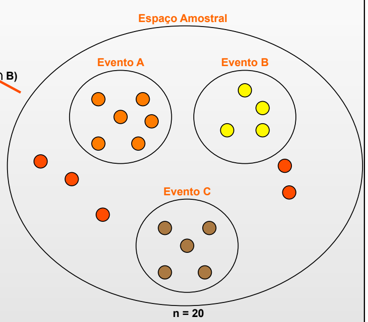
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = 6/20 + 4/20$

$= 0,3 + 0,2$

$P(A \cup B) = 0,5$

50% de chance de ser A ou B



Probabilidade

Exercício 4:

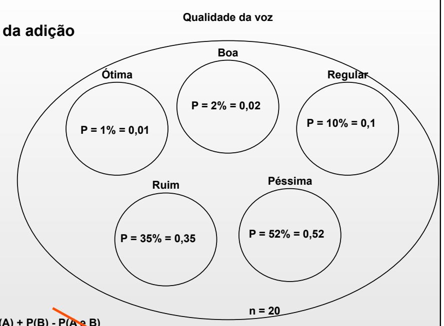
Em uma pesquisa de opinião entre os pacientes com rouquidão da UTFono sobre suas próprias qualidades vocais, 52% achavam suas vozes péssimas, 35% ruins, 10% regular, 2% boa e 1% ótima. Qual a probabilidade das vozes serem:

(a) Ótimas ou boas;

(b) Ruins ou péssimas;

Probabilidade

Teorema da adição



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \cancel{P(A \cap B)}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilidade

Como os eventos são mutuamente exclusivos (não podem ocorrer simultaneamente), ou seja, uma voz não pode ser ruim e boa ao mesmo tempo, será utilizada apenas a união entre os dados.

$$(a) = P(\text{ótima} \cup \text{boa}) = P(\text{ótima}) + P(\text{boa}) = 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}03(3\%)$$

$$(b) = P(\text{péssima} \cup \text{ruim}) = P(\text{péssima}) + P(\text{ruim}) = 0{,}52 + 0{,}35 = 0{,}87(87\%)$$

Probabilidade

Teorema do Produto

Dados os evento A e B, a probabilidade de ocorrência simultânea desses eventos é dada por:

Para eventos independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Probabilidade

Teorema do Produto

Exemplo, eventos independentes: Uma moeda é jogada duas vezes. A probabilidade de ocorrer cara nas duas jogadas é:

1/2 . 1/2 = 1/4 = 25%.

Probabilidade

Exercício 5:

Os pacientes do HDT são formados por 50 do sexo masculino e 100 do sexo feminino, enquanto na MESM, 80 são do sexo masculino e 20 são do sexo feminino. Escolhendo-se aleatoriamente um indivíduo do Hospital e um da Maternidade, determine a probabilidade de que ambos sejam do sexo feminino.

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$

Probabilidade

Como os eventos: sexo feminino do HDT e sexo feminino da MESM são independentes, então a ocorrência simultânea pode ser dada por:

$$P(femHDT \cap femMESM) = P(femHDT).P(femMESM) = \frac{100}{150}.\frac{20}{100} = 0{,}133(13{,}3\%)$$

Probabilidade

Teorema do Produto

Dados os evento A e B, a probabilidade de ocorrência simultânea desses eventos é dada por:

Para eventos dependentes:

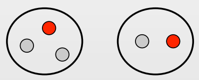
$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B/A)$$

Probabilidade

Teorema do Produto

Exemplo, eventos dependentes: Uma urna contém duas bolas brancas e uma vermelha. A probabilidade de se retirar duas bolas brancas sem que a primeira seja recolocada é:

P = P(retirar bola branca) . P(retira bola branca, sabendo que a 1° foi branca)



P = 2/3 . 1/2 = 2/6 = 1/3 = 33,3%.